เอกสารวิชาการว่าด้วยหลักการทางคณิตศาสตร์ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ ๖

อ้างอิงมาตรฐาน ค ๑.๑ การทำความเข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลสัมฤทธิ์อันเกิดจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และการประยุกต์ใช้ในบริบทต่างๆ

- **ตัวชี้วัด ค ๑.๑ ป.๖/๔:** การคำนวณหาตัวหารร่วมที่มากที่สุด (ห.ร.ม.) ของกลุ่มจำนวนนับ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกไม่เกินสามจำนวน
- **ตัวชี้วัด ค ๑.๑ ป.๖/๖:** การแสดงระเบียบวิธีทางตรรกะเพื่อค้นหาผลลัพธ์ของโจทย์ปัญหาเชิงวิเคราะห์ โดยอาศัยองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับตัวหารร่วมที่มากที่สุด (ห.ร.ม.) และพหุคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)

หมวดปฐมบท: รากฐานทางทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ก่อนที่จะก้าวเข้าสู่กระบวนการคำนวณเชิงลึก ทฤษฎีบทเบื้องต้นอันเป็นรากฐานซึ่งพึงได้รับการพิจารณามีดังต่อไปนี้:

๑. **ตัวประกอบ (Factor):** สามารถนิยามได้ว่าคือ จำนวนนับซึ่งสามารถนำไปปฏิบัติการหารจำนวนนับที่ถูกกำหนดไว้ได้อย่างลงตัวโดยปราศจากเศษสะสม (เศษมีค่าเท่ากับศูนย์) ยกตัวอย่างกรณีศึกษาเช่น กลุ่มตัวประกอบของจำนวน 10 ได้แก่ 1, 2, 5 และ 10 ๒. **จำนวนเฉพาะ (Prime Number):** นิยามได้แก่ จำนวนนับซึ่งประกอบด้วยตัวประกอบเพื่อการหารลงตัวเพียงสองประการเท่านั้น ได้แก่ เอกเทศ (1) และตัวของจำนวนนั้นเอง ยกตัวอย่างเช่น 2, 3, 5, 7, 11, และ 13 เป็นต้น

หมวดที่ ๑: ระเบียบวิธีว่าด้วยการคำนวณหาตัวหารร่วมที่มากที่สุด (ห.ร.ม.)

ตัวหารร่วมที่มากที่สุด (ห.ร.ม.) หมายความถึง จำนวนนับอันมีขอบเขตสูงสุด ซึ่งมีคุณสมบัติสามารถถูกนำไปเป็นตัวหารของกลุ่มจำนวนนับตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปได้อย่างลงตัวในทุกจำนวน อรรถประโยชน์หลักแห่งการคำนวณ ห.ร.ม. ได้แก่ การประยุกต์ใช้เพื่อการแบ่งสรรปันส่วนวัตถุหรือพื้นที่ให้มีขนาดหรือปริมาณต่อหน่วยสูงสุด โดยมีเงื่อนไขบังคับให้ปราศจากส่วนตกค้าง

กระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อการค้นหา ห.ร.ม. สำหรับจำนวนนับที่มีสมาชิกไม่เกินสามจำนวน สามารถกระทำได้ผ่านระเบียบวิธีหลัก ๓ ประการ ดังต่อไปนี้:

ระเบียบวิธีที่ ๑: การพิจารณาตัวประกอบร่วม

ระเบียบวิธีนี้มีความเหมาะสมและมีประสิทธิภาพต่อกลุ่มจำนวนนับที่มีค่าตัวเลขไม่สูงนัก โดยดำเนินการผ่านกระบวนการจำแนกตัวประกอบทั้งหมดของแต่ละจำนวนอย่างละเอียด จากนั้นจึงกระทำการคัดเลือกเฉพาะตัวประกอบร่วม (ตัวประกอบที่ปรากฏซ้ำกันในทุกกลุ่มจำนวน) ซึ่งมีมูลค่าสูงสุด

- **กรณีศึกษา:** การพิจารณาหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 24
    - กลุ่มตัวประกอบของ 12 ประกอบด้วย 1, 2, 3, 4, **6**, และ 12
    - กลุ่มตัวประกอบของ 18 ประกอบด้วย 1, 2, 3, **6**, 9, และ 18
    - กลุ่มตัวประกอบของ 24 ประกอบด้วย 1, 2, 3, 4, **6**, 8, 12, และ 24
    - เมื่อพิจารณากลุ่มตัวประกอบร่วม อันได้แก่ 1, 2, 3 และ 6

- ผลจากการวิเคราะห์ตัวประกอบร่วมที่มีมูลค่าสูงสุด พบว่าคือ 6
- **ข้อสรุปเชิงประจักษ์: ตัวหารร่วมที่มากที่สุดของ 12, 18 และ 24 คือ 6**

ระเบียบวิธีที่ ๒: กระบวนการแยกตัวประกอบทางคณิตศาสตร์

กระบวนการนี้อาศัยการแปลงโครงสร้างของจำนวนนับ ให้อยู่ในรูปของสมการผลคูณแห่ง "จำนวนเฉพาะ" ภายหลังจากการนั้น จะต้องทำการจำแนกและคัดเลือกเฉพาะจำนวนเฉพาะที่ปรากฏเป็นตัวคูณร่วมกันในทุกๆ สมการ เพื่อนำมาคำนวณหาผลคูณอันเป็นผลสัมฤทธิ์สุดท้าย

- **กรณีศึกษา:** การพิจารณาหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 24
    - 12 = **2** × 2 × **3**
    - 18 = **2** × **3** × 3
    - 24 = **2** × 2 × 2 × **3**
    - จากการสังเกตเชิงโครงสร้าง พบว่าจำนวน **2** และ **3** เป็นปัจจัยที่ปรากฏร่วมกันในฐานะตัวคูณของทุกสมการ
    - ผลคูณของปัจจัยร่วมดังกล่าว คือ 2 × 3 = 6
    - **ข้อสรุปเชิงประจักษ์: ตัวหารร่วมที่มากที่สุด คือ 6**

ระเบียบวิธีที่ ๓: กระบวนการหารสั้นอย่างต่อเนื่อง

ระเบียบวิธีซึ่งได้รับการยอมรับถึงความรวดเร็วและเป็นบรรทัดฐานสูงสุดนี้ ดำเนินการโดยการนำ "จำนวนเฉพาะ" ซึ่งมีคุณสมบัติสามารถปฏิบัติการหารทุกจำนวนที่ถูกกำหนดได้อย่างลงตัว มาใช้เป็นตัวหาร กระบวนการหารนี้จะต้องดำเนินไปอย่างต่อเนื่อง ตราบจนกระทั่งปราศจากจำนวนนับใดๆ ที่จะสามารถเป็นตัวหารร่วมได้อย่างลงตัวอีกต่อไป ผลสัมฤทธิ์จะพิจารณาจากผลคูณของกลุ่มตัวหารทั้งหมดที่อยู่ด้านหน้าสุด

- **กรณีศึกษา:** การพิจารณาหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 24
    1. ดำเนินการใช้จำนวน 2 (ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะ) ในฐานะตัวหารเบื้องต้น **2** | 12 , 18 , 24 |______________
    2. ผลลัพธ์จากการหารวาระแรกคือ 6, 9 และ 12 (จึงดำเนินการหารต่อเนื่องด้วยจำนวน 3 ซึ่งมีคุณสมบัติในการหารกลุ่มผลลัพธ์ดังกล่าวได้อย่างลงตัว) **3** | 6 , 9 , 12 |______________ 2 , 3 , 4
    3. ผลลัพธ์สุดท้ายประกอบด้วย 2, 3 และ 4 ซึ่งเมื่อพิจารณาตามหลักการแล้ว ปราศจากจำนวนนับใด (นอกเหนือจาก 1) ที่มีความสามารถในการหารจำนวนทั้งสามได้อย่างลงตัวพร้อมกันอีก กระบวนการหารจึงเป็นอันยุติ
    - การคำนวณผลลัพธ์กระทำโดยอาศัยเฉพาะกลุ่มตัวหารด้านหน้า: 2 × 3 = 6
    - **ข้อสรุปเชิงประจักษ์: ตัวหารร่วมที่มากที่สุด คือ 6**

หมวดที่ ๒: ระเบียบวิธีว่าด้วยการคำนวณหาพหุคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)

เพื่อก่อให้เกิดความบริบูรณ์ในการวิเคราะห์และแก้ไขโจทย์ปัญหาเชิงตรรกะ องค์ความรู้ที่ว่าด้วย พหุคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) ถือเป็นสิ่งซึ่งมิอาจละเว้นได้ **พหุคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)** สามารถถูกนิยามได้ว่า คือ

จำนวนนับอันมีขอบเขตมูลค่าต่ำสุด ซึ่งสามารถถูกปฏิบัติการหารโดยกลุ่มจำนวนนับที่กำหนดไว้แต่แรกเริ่มได้อย่างลงตัวโดยสมบูรณ์

- **กรณีศึกษา:** การคำนวณหา ค.ร.น. ของ 12 และ 18 ผ่านระเบียบวิธีการหารสั้น
    1. ดำเนินการด้วยตัวหารซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะ **2** | 12 , 18 |__ ***3 | 6 , 9 |***__ 2 , 3
    - **ข้อแตกต่างอันเป็นนัยสำคัญระหว่าง ค.ร.น. และ ห.ร.ม.:** ในกระบวนการคำนวณหาผลสัมฤทธิ์ของ ค.ร.น. นั้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องนำกลุ่มตัวหารบริเวณด้านหน้าผนวกเข้ากับกลุ่มผลลัพธ์เศษที่ตกค้างอยู่บริเวณด้านล่างสุดทั้งหมด มาดำเนินการหาผลคูณร่วมกัน
    - ผลสัมฤทธิ์แห่ง ค.ร.น. = $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$

(ข้อพึงสังเกตทางวิชาการ: ในสถานการณ์ที่เป็นการคำนวณหา ค.ร.น. ของกลุ่มจำนวนตั้งแต่ 3 จำนวนขึ้นไป หากปรากฏตัวหารซึ่งสามารถปฏิบัติการหารได้อย่างลงตัวเพียง 2 จำนวน กระบวนการหารสั้นนั้นยังคงได้รับอนุญาตให้ดำเนินต่อไปได้ จนกว่าจะปราศจากคู่จำนวนใดๆ ที่สามารถหารร่วมกันได้)

หมวดที่ ๓: การประยุกต์ใช้ทฤษฎีในการตีความและแก้โจทย์ปัญหา

แก่นสารสำคัญอันเป็นหัวใจของการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ในหมวดหมู่นี้ ได้แก่ กระบวนการอ่านวิเคราะห์และตีความ **"บริบทและนัยยะของคำศัพท์ (Contextual Implications and Terminology)"** เพื่อประกอบการพิจารณาวินิจฉัยว่า สถานการณ์ที่ถูกจำลองขึ้นนั้น มีความจำเป็นต้องพึ่งพาทฤษฎี ห.ร.ม. หรือ ค.ร.น. ในการแสวงหาผลสัมฤทธิ์

ข้อสังเกตและนัยยะทางภาษาแห่งโจทย์ปัญหา

- **สมมติฐานที่บ่งชี้ถึงการประยุกต์ใช้ทฤษฎี ห.ร.ม. (วัตถุประสงค์เพื่อการแบ่งสรรทรัพยากรให้ออกมาเป็นส่วนๆ โดยมีขอบเขตสูงสุดและปราศจากส่วนตกค้าง):**
    - มักปรากฏคำศัพท์อันมีความหมายเชิงขอบเขตสูงสุดเป็นองค์ประกอบ เช่น *มากที่สุด, ยาวที่สุด, ใหญ่ที่สุด, กว้างที่สุด*
    - บริบทแวดล้อมที่มักพบ: *กระบวนการตัดแบ่งวัสดุ, กระบวนการจัดสรรพื้นที่, กระบวนการบรรจุสิ่งของลงในภาชนะด้วยจำนวนที่สม่ำเสมอโดยปราศจากการปะปน, หรือการกำหนดขนาดของกระเบื้องให้มีพื้นที่ครอบคลุมสูงสุด*
- **สมมติฐานที่บ่งชี้ถึงการประยุกต์ใช้ทฤษฎี ค.ร.น. (วัตถุประสงค์เพื่อค้นหาจุดบรรจบแห่งปรากฏการณ์ ซึ่งประกอบด้วยจุดเริ่มต้นหรือความถี่อันมีความแปรปรวนต่างกัน):**
    - มักปรากฏคำศัพท์อันมีความหมายเชิงความถี่ หรือความพ้องจองในเชิงเวลา เช่น *น้อยที่สุด, สั้นที่สุด, พร้อมกัน, บังเกิดร่วมกันอีกวาระหนึ่ง, หรือวาระแห่งการบรรจบครั้งแรก*
    - บริบทแวดล้อมที่มักพบ: *เหตุการณ์เชิงวัฏจักรการโคจร, กลไกการขับเคลื่อนของระบบสัญญาณเตือน, สัญญาณไฟจราจร, หรือตารางการเดินรถในระบบขนส่งมวลชน*

กรณีศึกษาที่ ๑: การวิเคราะห์ปัญหาตามทฤษฎี ห.ร.ม. (กระบวนการจัดสรรกลุ่มทรัพยากร)

สถานการณ์สมมติ: ปรากฏทรัพยากรผลไม้จำนวน 3 หมวดหมู่ ประกอบด้วย ส้มจำนวน 24 หน่วย, แอปเปิลจำนวน 36 หน่วย และมังคุดจำนวน 48 หน่วย วัตถุประสงค์ของการดำเนินการคือการบรรจุผลไม้ดังกล่าวลงในภาชนะตะกร้า ภายใต้ข้อจำกัดที่ว่าทุกภาชนะจำต้องบรรจุปริมาณผลไม้ที่เท่าเทียมกัน ต้องเป็นผลไม้ในหมวดหมู่เดียวกันอย่างเคร่งครัด และต้องประกอบด้วยปริมาณผลไม้ต่อภาชนะที่ **"มากที่สุด"** เท่าที่จะสามารถพึงกระทำได้ ข้อซักถามคือ ปริมาณผลไม้ต่อหนึ่งภาชนะจะอยู่ที่จำนวนเท่าใด และจะต้องอาศัยภาชนะรวมทั้งสิ้นจำนวนเท่าใด

กระบวนการวิเคราะห์เชิงตรรกะ:

1. จากบริบทของสถานการณ์ ซึ่งระบุถึงการจัดสรรด้วยความสม่ำเสมอและมุ่งเน้นปริมาณสูงสุด เป็นที่ประจักษ์ชัดว่ามีความจำเป็นต้องปรับใช้ทฤษฎี ห.ร.ม. ของ 24, 36 และ 48
2. ดำเนินการผ่านระเบียบวิธีการหารสั้น: **2** | 24 , 36 , 48 |_ ***2 / 12 , 18 , 24 /***__ **3** | 6 , 9 , 12 |______________ 2 , 3 , 4
3. การคำนวณ ห.ร.ม. กระทำโดยนำกลุ่มตัวหารด้านหน้ามาหาผลคูณ: $2 \times 2 \times 3 = 12$ *(นัยยะทางผลลัพธ์: ปริมาณผลไม้ที่สามารถบรรจุได้สูงสุดต่อหนึ่งภาชนะ คือ 12 หน่วย)* **บทสรุปย่อย: ความจุของผลไม้ต่อภาชนะกำหนดไว้ที่ 12 หน่วย**
4. สำหรับการคำนวณปริมาณภาชนะรวมทั้งหมด ให้ดำเนินการนำผลลัพธ์เศษอันปรากฏอยู่ ณ บรรทัดสุดท้ายของการหารมาคำนวณผลรวมทางคณิตศาสตร์:
    - ภาชนะสำหรับหมวดหมู่ส้ม: 2 ภาชนะ
    - ภาชนะสำหรับหมวดหมู่แอปเปิล: 3 ภาชนะ
    - ภาชนะสำหรับหมวดหมู่มังคุด: 4 ภาชนะ
    - ผลรวมภาชนะทั้งสิ้น = 2 + 3 + 4 = 9 ภาชนะ

บทสรุปเชิงอรรถ: กระบวนการบรรจุจะให้ผลสัมฤทธิ์ที่ 12 หน่วยต่อภาชนะ และจำต้องอาศัยภาชนะในการดำเนินการทั้งสิ้น 9 ภาชนะ

กรณีศึกษาที่ ๒: การวิเคราะห์ปัญหาตามทฤษฎี ห.ร.ม. (กระบวนการบริหารจัดการพื้นที่)

สถานการณ์สมมติ: พื้นที่ห้องโถงมีลักษณะทางเรขาคณิตเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบด้วยมิติความกว้าง 20 เมตร และมิติความยาว 28 เมตร มีความประสงค์ที่จะดำเนินกระบวนการปูพื้นผิวด้วยวัสดุกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีมิติขนาดใหญ่ที่สุด เพื่อให้ครอบคลุมพื้นที่ทั้งหมดอย่างพอดี โดยมีข้อห้ามประการสำคัญคือห้ามมิให้มีการตัดแต่งรูปทรงของกระเบื้อง ข้อซักถามคือ กระเบื้องแต่ละแผ่นจำต้องมีมิติความยาวด้านละเท่าใด และปริมาณกระเบื้องรวมที่ต้องใช้คิดเป็นจำนวนกี่แผ่น

กระบวนการวิเคราะห์เชิงตรรกะ:

1. บริบทของปัญหาระบุถึงการแสวงหามิติขนาดสูงสุด ซึ่งมีความสามารถในการหารทั้งมิติความกว้างและมิติความยาวของพื้นที่เป้าหมายได้อย่างลงตัว (เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงกระบวนการตัดแต่งวัสดุ) สมมติฐานนี้จึงนำไปสู่การประยุกต์ใช้ทฤษฎี ห.ร.ม.

2. ดำเนินการคำนวณหา ห.ร.ม. ของ 20 และ 28 **4** | 20 , 28 *(อนุญาตให้ประยุกต์ใช้จำนวน 4 เป็นตัวหารเพื่อการลดทอนขั้นตอน)* |__________ 5 , 7
3. ผลสัมฤทธิ์ของ ห.ร.ม. คือ 4 ซึ่งเป็นดัชนีบ่งชี้ว่า วัสดุกระเบื้องจำต้องมีมิติความยาวด้านละ 4 เมตร
4. การคำนวณปริมาณวัสดุกระเบื้องรวม กระทำโดยนำผลลัพธ์เศษด้านล่างมาหาผลคูณร่วมกัน (อ้างอิงตามสมการการหาพื้นที่ = กว้าง × ยาว): ปริมาณกระเบื้องที่ต้องใช้ = 5 × 7 = 35 แผ่น

บทสรุปเชิงอรรถ: วัสดุกระเบื้องพึงมีมิติความยาวด้านละ 4 เมตร และปริมาณกระเบื้องที่จำต้องใช้ในการดำเนินการทั้งสิ้นคือ 35 แผ่น

กรณีศึกษาที่ ๓: การวิเคราะห์ปัญหาตามทฤษฎี ค.ร.น. (ปรากฏการณ์เชิงเวลาและเหตุการณ์)

สถานการณ์สมมติ: ระบบขนส่งมวลชนประกอบด้วยยานพาหนะจำนวน 3 เส้นทาง โดยเส้นทางที่ 1 มีกำหนดการปล่อยรถทุก 15 นาที, เส้นทางที่ 2 ทุก 20 นาที, และเส้นทางที่ 3 ทุก 30 นาที หากกำหนดให้ยานพาหนะทั้งสามเส้นทางออกเดินทาง **"พร้อมเพรียงกัน"** ในวาระแรกเมื่อเวลา 08.00 นาฬิกา ข้อซักถามคือเหตุการณ์การออกเดินทางอย่างพร้อมเพรียงกันของยานพาหนะทั้งสามเส้นทางนี้ จะบังเกิดซ้ำอีกวาระหนึ่งในห้วงเวลาใด

กระบวนการวิเคราะห์เชิงตรรกะ:

1. บริบทของสถานการณ์บ่งชี้ถึงปรากฏการณ์การบรรจบกันของรอบเวลาซึ่งมีความถี่และคาบเวลาแตกต่างกัน การจะค้นหาความพร้อมเพรียงในวาระถัดไปจึงเป็นดัชนีชี้วัดให้ประยุกต์ใช้ทฤษฎี ค.ร.น. ของ 15, 20 และ 30
2. ดำเนินการผ่านระเบียบวิธีการหารสั้น (ภายใต้กฎของ ค.ร.น. ที่อนุญาตให้หารต่อได้แม้จะลงตัวเพียง 2 จำนวน): **5** | 15 , 20 , 30 *(ประยุกต์ใช้จำนวน 5 ซึ่งหารลงตัวทั้งสิ้น)* |**_ *3 | 3 , 4 , 6 (ประยุกต์ใช้จำนวน 3 เพื่อหาร 3 และ 6 โดยคงจำนวน 4 ไว้) |_*_ 2** | 1 , 4 , 2 *(ประยุกต์ใช้จำนวน 2 เพื่อหาร 4 และ 2)* |______________ 1 , 2 , 1
3. การคำนวณ ค.ร.น. กระทำโดยนำกลุ่มตัวหารด้านหน้าและผลลัพธ์เศษบรรทัดล่างสุดทั้งหมดมาหาผลคูณร่วมกัน ผลสัมฤทธิ์แห่ง ค.ร.น. = 5 × 3 × 2 × 1 × 2 × 1 = 60 *(นัยยะทางผลลัพธ์: หน่วยของ ค.ร.น. จะต้องสอดคล้องกับหน่วยพื้นฐานของโจทย์ปัญหา ซึ่งในกรณีนี้คือ "นาที")* บทวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่า ระยะเวลาจำต้องผ่านไปอีก 60 นาที เหตุการณ์การออกเดินทางพร้อมเพรียงกันจึงจะบังเกิดซ้ำ
4. กระบวนการแปลงหน่วยวัดเวลา: ระยะเวลา 60 นาที มีค่าสมมูลกับระยะเวลา 1 ชั่วโมง เมื่ออ้างอิงจากฐานเวลาเริ่มต้น ณ 08.00 นาฬิกา และบวกระยะเวลาเพิ่มขึ้นอีก 1 ชั่วโมง จะบรรลุถึงห้วงเวลา 09.00 นาฬิกา

บทสรุปเชิงอรรถ: เหตุการณ์การออกเดินทางของยานพาหนะทั้งสามเส้นทางอย่างพร้อมเพรียงกัน จะบังเกิดการบรรจบกันอีกครั้ง ณ ห้วงเวลา 09.00 นาฬิกา